

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ МГНОВЕННОЙ ФОРМЫ НЕРОВНОЙ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ СОЛНЕЧНЫХ БЛИКОВ

Р.Г.Гардашов

*Институт географии им. акад. Г. Алиева НАН Азербайджана  
AZ1143, Баку, просп. Г.Джавида, 115*

Разработан метод определения состояния морской поверхности с использованием параметров, которые определяются по изображениям бликов Солнца на взволнованной морской поверхности. На примере показана корректность предложенного метода.

**Основные формулы.** В каждый момент времени морскую поверхность  $z = \zeta(x, y)$  можно представить как суперпозиции гармонических волн с амплитудами  $c_i$ , волновыми векторами  $\vec{k}_i = (k_{ix}, k_{iy})$  и фазами  $\varphi_i$  (Longuet-Higgins, 1969):

$$\zeta(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \cos(k_{ix}x + k_{iy}y + \varphi_i). \quad (1)$$

Как видно из (1), для определения мгновенной формы поверхности  $\zeta(x, y)$  необходимо знать  $c_i, k_{ix}, k_{iy}, \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), всего  $4n$  неизвестных. Для нахождения этих неизвестных можно получить  $4n$  нелинейных уравнения, которые определяются параметрами, выводимыми из изображения бликов Солнца (или другого источника света малого углового размера). Этими (известными) параметрами являются: координаты зеркальных точек  $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, m$ ; наклоны  $\zeta_x(x_j, y_j), \zeta_y(x_j, y_j)$ ; и величины  $\rho_i = \rho(x_j, y_j)$  (обратные модулю гауссовой кривизны и пропорциональные размерам бликов) в зеркальных точках:

$$\rho_i = \frac{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^2}{|\zeta_{xx}(x_j, y_j)\zeta_{yy}(x_j, y_j) - \zeta_{xy}^2(x_j, y_j)|}. \quad (2)$$

Если изображение поверхности получено с достаточно большого расстояния, то зеркальные точки  $(x_j, y_j)$  удовлетворят системе уравнений:

$$\begin{cases} \zeta_x(x, y) = \gamma_x = const \\ \zeta_y(x, y) = \gamma_y = const \end{cases}. \quad (3)$$

В частном случае, когда зондирование поверхности производится в вертикальном направлении, то  $\gamma_x = 0$  и  $\gamma_y = 0$ .

Для простоты дальнейших выкладок обозначим:

$$\alpha_i = k_{ix}x + k_{iy}y + \varphi_i. \quad (4)$$

Тогда из (1) имеем:

$$\begin{cases} \zeta_x(x, y) = -\sum_{i=1}^n c_i k_{ix} \sin \alpha_i \\ \zeta_y(x, y) = -\sum_{i=1}^n c_i k_{iy} \sin \alpha_i \\ \zeta_{xx}(x, y) = -\sum_{i=1}^n c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_i \\ \zeta_{yy}(x, y) = -\sum_{i=1}^n c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_i \\ \zeta_{xy}(x, y) = -\sum_{i=1}^n c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_i \end{cases}. \quad (5)$$

Таким образом, учитывая, что в зеркальных точках имеет место (2) и (3), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i k_{ix} \sin \alpha_{ij} = -\gamma_x \\ \sum_{i=1}^n c_i k_{iy} \sin \alpha_{ij} = -\gamma_y \\ \left| \sum_{i=1}^n c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{ij} \cdot \sum_{i=1}^n c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{ij} - \left( \sum_{i=1}^n c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{ij} \right)^2 \right| \\ = \frac{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^2}{\rho_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_{ij} = k_{ix}x_j + k_{iy}y_j + \varphi_i \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Число уравнений в системе (6) равно  $3m$ , а число неизвестных –  $4n$ . При условии  $3m = 4n$  число неизвестных равно числу уравнений, из решения системы (6) находятся неизвестные величины  $c_i, k_{ix}, k_{iy}, \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и, следовательно, по (1) определяем мгновенное положение морской поверхности.

Отметим, что решение системы (6) эквивалентно нахождению нулей функции:

$$\begin{aligned} & f(c_1, k_{1x}, k_{1y}, \varphi_1, \dots, c_n, k_{nx}, k_{ny}, \varphi_n) \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \left( \sum_{i=1}^n c_i k_{ix} \sin \alpha_{ij} + \gamma_x \right)^2 \right. \\ &+ \left( \sum_{i=1}^n c_i k_{iy} \sin \alpha_{ij} + \gamma_y \right)^2 \\ &+ \left[ \sum_{i=1}^n c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{ij} \cdot \sum_{i=1}^n c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{ij} \right. \\ &- \left. \left. \left( \sum_{i=1}^n c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{ij} \right)^2 \right] \right. \\ &\left. - \frac{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^2}{\rho_i} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Для решения систем нелинейных уравнений с большой точностью и скоростью разработаны эффективные численные методы (Ostrowski, 1966) и основанные на них стандартные программы (например, на Fortran и Matlab) (Press et al., 1992).

**Пример определения спектра.** На простом примере покажем корректность поставленной задачи. Пусть поверхность состоит из 3 гармоник, распространяющихся в разных направлениях.

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= c_1 \cos(k_{1x}x + k_{1y}y + \varphi_1) \\ &+ c_2 \cos(k_{2x}x + k_{2y}y + \varphi_2) \\ &+ c_3 \cos(k_{3x}x + k_{3y}y + \varphi_3) \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим случай зондирования в вертикальном направлении. Тогда  $\gamma_x = 0$  и  $\gamma_y = 0$ . Зеркальные точки определяются как решение системы (3), которая для поверхности (9) принимает вид:

$$\begin{cases} c_1 k_{1x} \sin(k_{1x}x + k_{1y}y + \varphi_1) \\ + c_2 k_{2x} \sin(k_{2x}x + k_{2y}y + \varphi_2) \\ + c_3 k_{3x} \sin(k_{3x}x + k_{3y}y + \varphi_3) = 0 \\ c_1 k_{1y} \sin(k_{1x}x + k_{1y}y + \varphi_1) \\ + c_2 k_{2y} \sin(k_{2x}x + k_{2y}y + \varphi_2) \\ + c_3 k_{3y} \sin(k_{3x}x + k_{3y}y + \varphi_3) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

На основе численного моделирования решим прямую и обратную задачу.

**Решение прямой задачи.** Для численного моделирования поверхности (9) выберем значения параметров, приведённые в табл. 1.

На рис. 1 показано 3D изображение этой поверхности в области:  $[0, 15] \times [0, 15]$ . В рассматриваемой области имеются 5 зеркальных точек (бликов). Зеркальные точки 1, 4 – седлообразного типа, а 2, 3, 5 – эллиптического.

Численное решение системы (10) методом Ньютона-Рафсона в этой области дают характеристики зеркальных точек, приведённых в табл. 2.

**Решение обратной задачи.** Теперь допустим, что мы имеем изображение бликов, характеристики которых совпадают с характеристиками зеркальных точек, которые приведены в табл. 2.

Используя эти характеристики зеркальных точек, восстановим поверхность (9), которая состоит из суперпозиций 3 гармоник. Для этого мы должны решить систему (6) и найти 12 неизвестных:

$$c_1, k_{1x}, k_{1y}, \varphi_1, c_2, k_{2x}, k_{2y}, \varphi_2, c_3, k_{3x}, k_{3y}, \varphi_3.$$

Таблица 1

Значения параметров

|           |                                       |   |   |                        |
|-----------|---------------------------------------|---|---|------------------------|
| $c_1 = 1$ | $k_1 =  \vec{k}_1  = \frac{2\pi}{8}$  | $k_{1x} = k_1 \cos 0^\circ \approx 0.7854$  | $k_{1y} = k_1 \sin 0^\circ = 0$             | $\varphi_1 = 30^\circ$ |
| $c_2 = 2$ | $k_2 =  \vec{k}_2  = \frac{2\pi}{10}$ | $k_{2x} = k_2 \cos 30^\circ \approx 0.5441$ | $k_{2y} = k_2 \sin 30^\circ \approx 0.3142$ | $\varphi_2 = 30^\circ$ |
| $c_3 = 3$ | $k_3 =  \vec{k}_3  = \frac{2\pi}{12}$ | $k_{3x} = k_3 \cos 45^\circ \approx 0.3702$ | $k_{3y} = k_3 \sin 45^\circ \approx 0.3702$ | $\varphi_3 = 30^\circ$ |

Чтобы система (6) содержала 12 уравнений, мы должны использовать 4 зеркальные точки (из условия  $3m = 4n$  получаем  $m = 4$ , т.к.  $n = 3$ ). Следовательно, система (6) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 k_{1x} \sin \alpha_{11} + c_2 k_{2x} \sin \alpha_{21} + c_3 k_{3x} \sin \alpha_{31} = 0 \\ c_1 k_{1y} \sin \alpha_{11} + c_2 k_{2y} \sin \alpha_{21} + c_3 k_{3y} \sin \alpha_{31} = 0 \\ c_1 k_{1x} \sin \alpha_{12} + c_2 k_{2x} \sin \alpha_{22} + c_3 k_{3x} \sin \alpha_{32} = 0 \\ c_1 k_{1y} \sin \alpha_{12} + c_2 k_{2y} \sin \alpha_{22} + c_3 k_{3y} \sin \alpha_{32} = 0 \\ c_1 k_{1x} \sin \alpha_{13} + c_2 k_{2x} \sin \alpha_{23} + c_3 k_{3x} \sin \alpha_{33} = 0 \\ c_1 k_{1y} \sin \alpha_{13} + c_2 k_{2y} \sin \alpha_{23} + c_3 k_{3y} \sin \alpha_{33} = 0 \\ c_1 k_{1x} \sin \alpha_{14} + c_2 k_{2x} \sin \alpha_{24} + c_3 k_{3x} \sin \alpha_{34} = 0 \\ c_1 k_{1y} \sin \alpha_{14} + c_2 k_{2y} \sin \alpha_{24} + c_3 k_{3y} \sin \alpha_{34} = 0 \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{i1} \cdot \sum_{i=1}^3 c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{i1} \\ - \left( \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{i1} \right)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{\rho_1} \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{i2} \cdot \sum_{i=1}^3 c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{i2} \\ - \left( \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{i2} \right)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{\rho_2} \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{i3} \cdot \sum_{i=1}^3 c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{i3} \\ - \left( \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{i3} \right)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{\rho_3} \\ \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix}^2 \cos \alpha_{i4} \cdot \sum_{i=1}^3 c_i k_{iy}^2 \cos \alpha_{i4} \\ - \left( \sum_{i=1}^3 c_i k_{ix} k_{iy} \cos \alpha_{i4} \right)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{\rho_4} \end{array} \right. , \quad (11)$$

где

$$\alpha_{ij} = k_{ix} x_j + k_{iy} y_j + \varphi_i \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right). \quad (12)$$

Численное решение системы (11) методом Ньютона-Рафсона дают значения неизвестных, приведённых в табл. 3.

Сравнение значений восстановленных параметров поверхности с их исходными величинами показывает, что обратная задача решается с большой точностью. Сходимость к решению в методе Ньютона-Рафсона обеспечивается благодаря возможности выделения промежутков, внутри которых лежат решения системы уравнений.

**Заключение.** Изложенный метод позволяет построить мгновенную форму морской поверхности по характеристикам зеркальных точек (бликов) в мгновенном изображении поверхности. При этом принимается, что число гармоник, образующих поверхность априори известно. По-видимому, этот недостаток можно будет устранить, используя информацию, которую доставляют блики, неучтённые при составлении системы уравнений.

Вообще, знание мгновенного положения морской поверхности важно для решения ряда практических задач космической океанологии, таких как установление лазерной связи спутника с подводной лодкой, перенос изображения через морскую поверхность, обнаружение в спектре поверхности “опасной гармоники” (цунами) и т.д. Поэтому мы предполагаем, что предложенный новый подход получит свое дальнейшее развитие в основном в следующих направлениях: 1) разработка способа определения числа гармоник в спектре поверхности через характеристики бликов, 2) нахождение эффективного численного метода, адаптированного к решению полученной системы уравнений с достаточно большим числом неизвестных.

Таблица 2

Характеристики зеркальных точек

|                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $x_1 = 3.67$    | $x_2 = 6.69$    | $x_3 = 10.57$   | $x_4 = 11.97$   | $x_5 = 2.64$    |
| $y_1 = 12.61$   | $y_2 = 8.98$    | $y_3 = 13.33$   | $y_4 = 3.69$    | $y_5 = 5.03$    |
| $\rho_1 = 3.28$ | $\rho_2 = 3.58$ | $\rho_3 = 4.71$ | $\rho_4 = 6.32$ | $\rho_5 = 3.09$ |

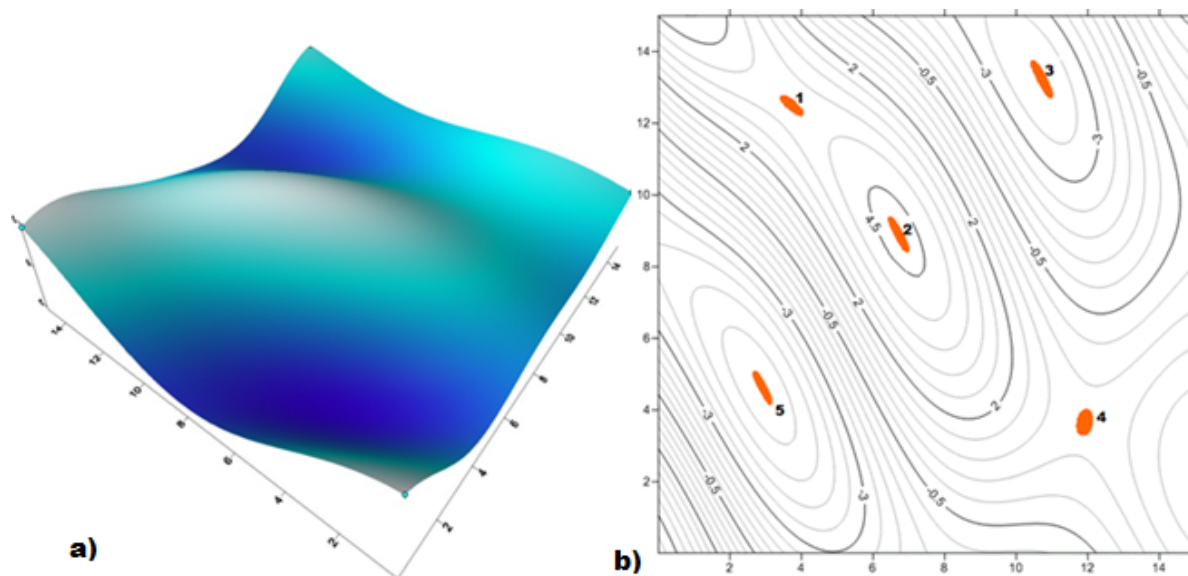


Рис. 1. а) 3D изображение моделируемой поверхности; б) расположение блоков

Таблица 3

Значения восстановленных параметров поверхности

|                    |                       |                       |                                |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------------|
| $c_1 \approx 0.98$ | $k_{1x} \approx 0.78$ | $k_{1y} \approx 0.01$ | $\varphi_1 \approx 30.4^\circ$ |
| $c_2 \approx 2.03$ | $k_{2x} \approx 0.54$ | $k_{2y} \approx 0.31$ | $\varphi_2 \approx 44.9^\circ$ |
| $c_3 \approx 3.04$ | $k_{3x} \approx 0.37$ | $k_{3y} \approx 0.37$ | $\varphi_3 \approx 0.1^\circ$  |

**ЛИТЕРАТУРА**

LONGUET-HIGGINS, M. S. 1969. The distribution of the sizes of images reflected in a random surface. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1, 91-100.

OSTROWSKI, A.M. 1966. Solutions of equations and systems of equations. Academic Press. New York.  
 PRESS, W.H. et al. 1992. Numerical recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. 1447 pp.

Рецензент: к.ф.-м.н. Л.С.Долин (Институт прикладной физики РАН)