

© Г.Г.Кулиев, А.Д.Аскеров, 2007

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ПРИРАЩЕНИИ ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ ГЛУБИН ЗЕМЛИ И ЕГО НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Г.Г.Кулиев, А.Д.Аскеров

*Институт геологии НАН Азербайджана
AZ1143, Баку, просп. Г. Джавида, 29А*

В рамках общей нелинейной теории получено точное решение полной нелинейной задачи о приращении плотности среды глубин Земли в зависимости от роста деформации. Исходя из неклассически линеаризованного подхода, показано, что это решение для различных геологических сред «внутренне» неустойчиво. С применением неклассически линеаризованного подхода и с учетом нелинейности процесса деформирования и напряженности среды получена формула для определения приращения плотности по глубине Земли при произвольном упругом потенциале сжимаемых моделей среды. Исходя из концепции «внутренней» неустойчивости, определены пределы применимости полученных результатов. При описании деформаций отдельных материалов (сред) с помощью квадратичного упругого потенциала и потенциала типа Мурнагана получены конкретные численные результаты о приращении плотности материалов (сред) при нелинейном деформировании. В случае всестороннего сжатия при достижении состояния «внутренней» неустойчивости, процесс уплотнения переходит в процесс разуплотнения.

Введение

Развитие интеграций методов исследований механики и геологии позволило решить ряд проблем структурной геологии, тектонофизики и физики Земли. В данной статье, исходя из общей нелинейной теории механики деформируемого твердого тела, удалось получить точное решение задачи о распределении плотности сред по глубине Земли в зависимости от роста деформации.

В последние полвека инкриментальная теория механики деформируемого твердого тела (Biot, 1965) получила существенное развитие и превратилась в неклассически линеаризованную теорию (НЛТ). В этом огромная заслуга принадлежит академику А.Н. Гузю. Он, его ученики и сотрудники разработали теоретические (как в смысле вопросов механики, так и в смысле математических вопросов разработки методов решения различных классов задач) основы данного подхода с охватом малых и больших упругих, упруго-пластических и более сложных процессов деформирования применительно к изотропным, анизотропным средам в континуальном приближении и композитным материалам в пределах кусочно-однородной модели. С помощью НЛТ поставлены и решены новые классы задач в различных разделах механики деформируемого твердого тела и гидроупругос-

ти (Гузь, 1977; Гузь, 1979; Гузь, 1986а,б; Гузь, 1990; Гузь и Махорт, 1988). С самого начала развития инкриментальной теории и НЛТ основными областями приложения их результатов оказались геофизика, геодинамика, механика горных пород, горная механика, тектоника и другие разделы наук о Земле (Абасов и др., 1993; Абасов и др., 1999; Абасов и др., 2000; Гузь, 1977).

Анализ результатов, полученных в рамках НЛТ тектонофизики (Абасов и др., 1993; Абасов и др., 1999; Абасов и др., 2000; Александров и др., 2001; Кулиев, 2000; Кулиев, 2001; Кулиев, 2005а,б), показывает, что они по сравнению с результатами классических и прикладных подходов более реально отражают естественные процессы, связанные с деформациями, и позволяют также выяснить механизмы их протекания. Данная теория позволила при исследовании различных проблем структурной геологии, геодинамики, сейсморазведки, механики горных пород и т.д., наряду с линейными физико-механическими свойствами среды, также учитывать нелинейные физико-механические свойства среды, геометрические и силовые параметры деформируемой системы (Кулиев, 2005а,б). В связи с этим представляется целесообразным определение параметров внутреннего строения Земли также в рамках данного подхода.

О пределах изменения приращения плотности. Используя известное соотношение об изменении геометрических объектов (Гузь, 1986 а) в рамках общей нелинейной и линеаризированной теории, рассмотрим пределы изменения приращения плотности материалов. Из нелинейной теории известно (Гузь, 1986 а), что

$$\frac{dV^*}{dV} = \sqrt{I_3} \quad (1.1)$$

$$I_3 = 1 + 2A_1 + 2(A_1^2 - A_2) + \frac{4}{3}(2A_3 - 3A_2A_1 + A_1^3),$$

где dV^* и dV - объемы бесконечно малого материального параллелепипеда соответственно в актуальной конфигурации и в естественном состоянии; A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) - алгебраические инварианты тензора деформации Грина.

Используя (1.1) для приращения плотности, получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{dV}{dV^*} - 1 = \frac{1}{\sqrt{I_3}} - 1. \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что

$$\text{при } dV^* \rightarrow 0, \frac{\Delta\rho}{\rho} \rightarrow \infty; \quad (1.3)$$

$$\text{а при } dV = dV^*, \frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.$$

Следовательно, в самом общем случае

$$0 < \frac{\Delta\rho}{\rho} < \infty.$$

В случае всестороннего деформирования

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon; \quad A_1 = 3\varepsilon; \quad A_2 = 3\varepsilon^2; \\ A_3 = 3\varepsilon^3; \quad I_3 = 1 + 6\varepsilon + 12\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

С учетом (1.4) из (1.2) находим

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = (1 + 6\varepsilon + 12\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)^{-\frac{1}{2}} - 1. \quad (1.5)$$

Известно, что для всестороннего сжатия $-\frac{1}{2} < \varepsilon < 0$. С учетом этого неравенства и

$$(1.5) \text{ получаем, что } 0 < \frac{\Delta\rho}{\rho} < \infty.$$

В случае линеаризированной теории (в координатах начального состояния) в рамках теории больших начальных деформаций (Гузь, 1986 а)

$$\frac{dV^*}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (1.6)$$

где λ_i - коэффициенты удлинения (укорочения).

При всестороннем деформировании $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Тогда согласно (1.2) и (1.6)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \lambda_1^{-3} - 1. \quad (1.7)$$

При всестороннем сжатии $0 < \lambda_1 < 1$. С учетом этого неравенства и (1.7) получаем, что $0 < \frac{\Delta\rho}{\rho} < \infty$. Данный интервал с правой стороны

может быть уточнен при рассмотрении структуры конкретных упругих потенциалов, исходя из различных соображений, в частности, путем исследования проблемы «внутренней» неустойчивости. Ниже этот вопрос будет рассмотрен для ряда материалов.

Сравнение формул (1.5) и (1.7) показывает, что результаты по приращению плотности в зависимости от роста деформации в рамках нелинейной и линеаризированной теории в случае всестороннего сжатия совпадают, что и должно быть. График зависимости приращения плотности от роста деформации всестороннего сжатия приведен на рис. 1.

О плотности сред в современных моделях внутреннего строения Земли. Реальные модели внутреннего строения Земли, в том числе и так называемые современные модели РЕМ (параметрические модели Земли), приводят к хорошему согласию с данными полевых геофизических наблюдений (Буллен, 1978).

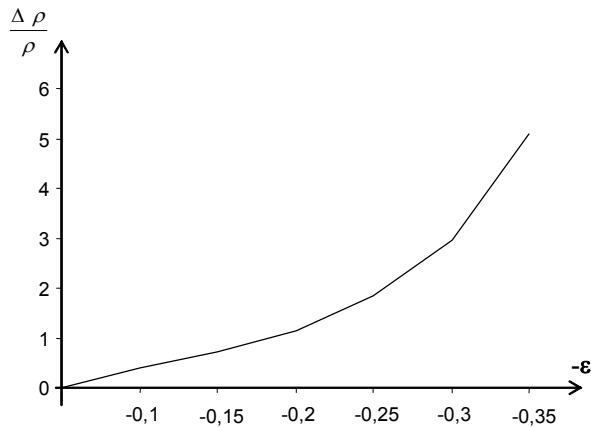


Рис. 1. Зависимость приращения плотности от роста деформации

Распределение плотности, дебаевская температура, параметр Грюнайзена, решеточная часть коэффициента теплопроводности, удельная энтропия среды, адиабатическая температура, температура плавления и их градиенты, скачки энтропии и теплового эффекта при фазовых переходах, наклон кривого фазового равновесия и теплота кристаллизации для мантии и ядра являются основными параметрами внутреннего строения Земли в параметрических моделях (Жарков, 1983). При их определении необходимо предварительно иметь сведения о приращении плотности по глубине недр. Поэтому очень важно более точно определять этот параметр с учетом особенностей процесса деформирования в реальных условиях. В современных моделях для его определения применяется уравнение Адамса-Вильямсона (Буллен, 1978; Жарков, 1983):

$$\Delta \rho = \frac{\rho g}{\Phi} \Delta l, \quad (2.1)$$

где ρ – плотность среды в рассматриваемой глубине, g – ускорение силы тяжести, соответствующее данной глубине, $\Delta \rho$ – приращение плотности, Δl – приращение глубины, $\Phi = \frac{K}{\rho}$ – сейсмический параметр, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – модуль сжатия; λ, μ – модули упругости второго порядка.

Несмотря на хорошую согласованность результатов формулы (2.1) с результатами фактических наблюдений, данная формула не позволяет раскрыть в полной мере механизм изменения плотности по глубине. При использовании формулы (2.1) сейсмический параметр Φ определяется через скорость упругих продольных V_p и поперечных волн V_s , т.е. в виде

$$\Phi = V_p^2 - \frac{4}{3}V_s^2. \quad (2.2)$$

Эта формула в принципе справедлива только для упругих изотропных ненапряженных сред, где

$$\rho V_p^2 = \lambda + 2\mu, \quad \rho V_s^2 = \mu. \quad (2.3)$$

На практике скорости упругих волн определяются в реальных земных условиях, которые существенно сложнее, чем используемые при выводе (2.3). Для расширения области применимости (2.1) необходимо, чтобы при определении скоростей упругих волн также учитывались нелинейности процесса деформирования и напряженности среды. Тем более, что экспериментальные результаты (Александров и др., 2001; Альтшулер и др., 2004; Бакулин и Протосения, 1982; Буллен, 1978; Волярович и др., 1974; Выжва и др., 2005; Кулиев, 2000; Кларка, 1969; Сафаров, 2003; Калинин, 2000; Navrotsky, 1994; Thurston and Brugger, 1964; Yin and Rasolofosaon, 1994) показывают, что физико-механические и плотностные характеристики при изменяющихся термобарических условиях не остаются фиксированными (как принято в линейных теориях), а нелинейно изменяются в значительных интервалах. В этих условиях применение (2.3) может внести существенные искажения в научные представления о внутреннем строении Земли вообще, а также в количественные значения отдельных параметров. Поэтому далее в данной статье, исходя из положений НЛТ, для определения приращений плотности по глубине получено уравнение типа Адамса-Вильямсона с учетом геометрической, физической нелинейности деформаций и напряженности сред.

Неклассически-линеаризованный подход (НЛП). В рассматриваемой проблеме

геодинамический аспект характеризуется специфичностью реализации процесса деформирования в различных геологических средах и условиях под действием разнообразных силовых факторов космогенной, экзогенной и эндогенной природы. Особую роль при этом играет способность деформирования различных пород из разных литологических и стратиграфических групп. В связи с этим в геодинамических исследованиях необходимо соответствующим образом моделировать законы деформирования пород. Здесь по аналогии с механикой деформируемого твердого тела предполагается, что с достаточной степенью точности эти законы для сравнительно жестких сред могут быть установлены с помощью упругих потенциалов для сжимаемых и несжимаемых сред.

В рамках НЛТ выделяют (Гузь, 1986а,б) три различных варианта теории в зависимости от величин деформаций в начальном состоянии, т.е. в состоянии до возникновения волнового процесса: а) теория больших (конечных) начальных деформаций (т.б.н.д.); б) первый вариант теории малых начальных деформаций (сдвиги и удлинения являются малыми по сравнению с единицей) (п.в.т.м.н.д.); в) второй вариант теории малых начальных деформаций (дополнительно к первому варианту теории малых начальных деформаций считается, что компоненты тензоров напряжений и деформаций подчиняются закону Гука) (в.в.т.м.н.д.).

Также различают два случая представления плоской гармонической волны. В первом – изменения расстояний между материальными частицами за счет начальной деформации не учитываются, и скорость распространения волны названа "естественной" или "натуральной" скоростью (Гузь, 1986б; Thurston and Brugger, 1964). Во втором – изменения расстояний между материальными частицами за счет начальной деформации учитываются, и скорость распространения волны называется "истинной" скоростью. В связи с вышеизложенным, при сопоставлении теоретических результатов с результатами экспериментальных (лабораторных) и полевых сейсмических исследований, необходимо различать все эти положения.

Наиболее полно НЛТ распространения упругих волн в предварительно напряженных средах разработана в (Гузь, 1986б). Получены

общие формулы для определения кинематических и динамических характеристик отраженных и преломленных упругих волн в произвольно однородно напряженной среде в пределах трехмерной линейризированной эластодинамики с привлечением для сжимаемых и несжимаемых изотропных и анизотропных сред различных упругих потенциалов в случае малых и больших деформаций. В частности, в (Кулиев и Джаббаров, 1998) на основе (Гузь, 1986б), для определения скоростей упругих волн в нелинейно деформируемых анизотропных средах получены следующие формулы:

$$2\rho V_{\alpha}^2 = \omega_{3333} + \omega_{3113} + (\omega_{1111} + \omega_{1331} - \omega_{3333} - \omega_{3113}) \sin^2 \theta_{\alpha} \pm \Omega_{\alpha};$$

$$\Omega_{\alpha} = \left\{ \left[(\omega_{1111} - \omega_{1331}) \sin^2 \theta_{\alpha} - (\omega_{3333} - \omega_{3113}) \cos^2 \theta_{\alpha} \right]^2 + 4(\omega_{1331} + \omega_{3113})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\rho V_{SH}^2 = \omega_{1221} \sin^2 \theta + \omega_{3223} \cos^2 \theta, \quad (3.1)$$

где знак "+" перед слагаемой Ω соответствует квазипродольной Р волне и при этом $V_{\alpha} = V_p$; а знак "-" – квазипоперечной SV волне и при этом $V_{\alpha} = V_{sv}$; ω_{ijnm} – компоненты тензора четвертого ранга, характеризующие линейные и нелинейные физико-механические свойства среды и начального напряженного состояния, которые определяются с конкретизацией структуры упругих потенциалов (Гузь, 1986а,б); θ_{α} – углы падения и отражения квазипродольной Р и квазипоперечной SV волн.

Для вывода уравнения типа Адамса-Вильямсона с учетом напряженности сред и нелинейности процесса деформирования рассмотрим случай $\theta = 0$ при всестороннем сжатии. Тогда

$$\rho V_p^2 = \omega_{1111} = \omega_{2222} = \omega_{3333};$$

$$\rho V_s^2 = \rho V_{sv}^2 = \rho V_{SH}^2 = \omega_{3223} = \omega_{2372} =$$

$$= \omega_{1221} = \omega_{2112} = \omega_{3113} = \omega_{1331}.$$

На основе (3.2) для определения сейсмического параметра Φ , согласно (2.2), находим

$$\Phi = \rho^{-1} \left(\omega_{3333} - \frac{4}{3} \omega_{3223} \right). \quad (3.3)$$

В этом случае уравнение Адамса-Вильямсона приобретает вид:

$$\Delta \rho = \frac{\rho^2 g}{\omega_{3333} - \frac{4}{3} \omega_{3223}} \Delta \ell, \quad (3.4)$$

который является основным для изучения приращения плотности пород с приращением глубин при учете предварительной напряженности сжимаемой среды, физической и геометрической нелинейности деформирования.

Согласно (Гузь, 1979; Гузь, 1986а), составляющие тензора $\omega_{ij\alpha\beta}$ в данном случае определяются в виде:

$$\omega_{ij\alpha\beta} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \mu_0 (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) + S_0 (\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}), \quad (3.5)$$

где введены обозначения: для т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д.

$$\lambda_0 = \lambda_1^2 a_0 - S_0; \mu_0 = \lambda_1^2 b_0 + S_0, \quad (3.6)$$

и для в.в.т.м.н.д.

$$\lambda_0 = a_0 - S_0; \mu_0 = b_0 + S_0. \quad (3.7)$$

Здесь величины a_0 и b_0 - известные алгебраические выражения, содержащие параметры линейных физико-механических свойств среды и начальных напряжений (Гузь, 1986а). λ_i ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) - коэффициенты удлинения (укорочения); δ_{ij} - символы Кронеккера; $S_0 = S_{\beta\beta}^0$, где $S_{\beta\beta}^0$ - нормальные компоненты тензора обобщенных напряжений в начальном состоянии в рамках т.б.н.д.; в случае п.в.т.м.н.д. и в.в.т.м.н.д. $S_0 = \sigma_0 = \sigma_{\beta\beta}$, где

$\sigma_{\beta\beta}$ - нормальные компоненты тензора обычных напряжений в начальном напряженном состоянии; в однородном начальном напряженном состоянии составляющие тензора деформаций определяются в виде:

$$2\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij} \varepsilon_0; 2\varepsilon_0 = \lambda_1^2 - 1; \varepsilon_0 = \lambda_0 - 1. \quad (3.8)$$

В (3.8) второе выражение соответствуют случаю т.б.н.д. и п.в.и.н.д., а третье - в.в.т.м.н.д.

С учетом (3.5)- (3.7) формуле (3.4) при использовании "истинных" скоростей придадим вид:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta l} = \frac{\rho^2 g}{\lambda_1^2 \left(K_0 - \frac{4}{3} S_0 \right)}; K_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3} \mu_0. \quad (3.9)$$

В случае использования "натуральных" скоростей в формуле (3.9) необходимо принимать $\lambda_1 = 1$.

Анализ качественного характера. Из формул (2.1) - (2.3) следует, что характер изменения приращения плотности зависит от характера вариации K для различных сред. При этом возможны следующие варианты:

1. Из условий $\lambda > 0$, т.е. из $V_p > \sqrt{2} V_S$ и $\mu > 0$, т.е. из $V_S > 0$, следует, что $K > 0$;
2. Из условий $\mu > 0$ и $V_p > \frac{2}{\sqrt{3}} V_S$ также следует, что $K > 0$;
3. При $V_p \rightarrow \sqrt{2} V_S$, т.е. при $\lambda \rightarrow 0$, следует, что $0 < K \rightarrow \frac{2}{3} \mu < \mu$;
4. При $V_p < \sqrt{2} V_S$ и $-\frac{2}{3} \mu < \lambda < 0$, т.е. при $\frac{2}{\sqrt{3}} V_S < V_p < \sqrt{2} V_S$, следует, что $0 < K < \frac{2}{3} \mu$;
5. При $V_p \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} V_S$ следует, что $K \rightarrow 0$;

6. При $\lambda < -\frac{2}{3}\mu$, т.е. при $V_p < \frac{2}{\sqrt{3}}V_s$, следует, что $K < 0$.

Известно, что выполнение условий

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0 \text{ и } \mu > 0 \quad (4.1)$$

обеспечивает единственность решения задач линейной теории упругости, согласно теореме Кирхгофа (Гузь, 1986а).

В пределах вариантов 1 – 4 применимость формулы (2.1) не вызывает сомнения. Существование теоретических возможностей вариантов 5 и 6 требует их исследования. Из формулы (3.9) следует, что такие возможности могут появляться в силу нелинейности деформирования и напряженности сред. Так, при

$$S_0 \geq \frac{3}{4}K_0 \quad (4.2)$$

приращение плотности либо равно нулю, либо отрицательно. Следовательно, возможны случаи, когда при достижении определенных уровней начальных напряжений в нелинейно деформируемой среде может реализоваться процесс разуплотнения. Кроме того, формула (3.9) применима при выполнении достаточных условий применимости статического метода энергетического подхода. При всестороннем деформировании эти условия, согласно (Гузь, 1979; Гузь, 1986а), имеют вид:

$$K_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 > 0 \text{ и } \mu_0 > 0. \quad (4.3)$$

Выполнение условий (4.3) обеспечивает единственность решения задач НЛТ при всестороннем деформировании. Данный вопрос подробно исследован в (Гузь, 1979; Гузь, 1986а), где показано, что нарушение условий (4.3) соответствует явлению "внутренней" неустойчивости. Количественные оценки о "внутренней" неустойчивости в (Гузь, 1979; Гузь, 1986а,б) получены с использованием конкретных упругих потенциалов в пределах линейного приближения (в смысле (Гузь, 1986б)). Такое приближение для традицион-

ных материалов в пределах технических требований функционирования конструкций, изготовленных из них без разрушения, вполне обоснованно. Однако для условий глубоких недр Земли необходимо исходить из нелинейных соотношений, так как при этом величины напряжений могут достигать огромных значений, и, несмотря на это, «конструкция-Земля» не теряет своей несущей способности.

Поэтому линейризация по параметру $\frac{p}{\mu}$ в

данном случае может привести к неверным результатам (здесь p - параметр интенсивности внешней нормальной нагрузки на единицу площади).

"Внутренняя" неустойчивость соответствует потере эллиптичности, более того, вырождению основных систем уравнений НЛТ. Поскольку при этом нарушаются условия единственности решений неклассически линейризованных задач, то появляются неединственные решения, что и должно иметь место. Это – специфическая неустойчивость однородной неограниченной области при заданных на бесконечности нагрузках (Гузь, 1979; Гузь, 1986 а,б). В случае изначально изотропных сред начальные напряжения как бы играют роль внутренней структуры, подобной внутренней структуре композитных сред в анизотропном приближении в пределах феноменологического подхода. В случае достижения в докритическом состоянии величин напряжений, близких значениям модулей упругости (поэтому для исследования задач "внутренней" неустойчивости в основных соотношениях необходимо сохранять и нелинейные относительно параметра нагрузки слагаемые), малейшее дополнительное возмущение в некоторых случаях приводит к процессу "внутренней" неустойчивости, которая вообще не характерна для предварительно не напряженных изотропных сред.

Расчетные формулы при использовании различных упругих потенциалов. Для получения количественных результатов необходимо рассмотреть конкретные упругие потенциалы.

Квадратичный потенциал. Исходя из формул (3.6)-(3.9), (4.3) и (Гузь, 1986а,б), в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. при использова-

нии «истинных» скоростей в случае всестороннего деформирования в нелинейном приближении получаем:

$$K_0(\varepsilon_0) = (1 + 3\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0^2)K; \quad (5.1)$$

$$\mu_0(\varepsilon_0) = \mu + 3K\varepsilon_0; \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_0; \\ y = \frac{1}{(1 + \varepsilon_0)(1 + 2\varepsilon_0)K}; \quad y = \frac{\Delta \rho}{\rho^2 g \Delta l}. \quad (5.3)$$

В линейном приближении (в смысле (Гузь, 1986б)) формулам (5.1)-(5.3) придадим вид:

$$K_0(\varepsilon_0) = (1 + 3\varepsilon_0)K; \\ \mu_0 = \mu + 3K\varepsilon_0; \quad (5.4)$$

$$y = \frac{1}{(1 + 3\varepsilon_0)K}. \quad (5.5)$$

В рамках в.в.т.м.н.д.:

$$K_0(\varepsilon_0) = (1 - \varepsilon_0)K = K - \frac{\sigma_0}{3}; \\ \mu_0 = \mu + \sigma_0; \quad (5.6)$$

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = \sigma_0 = 3K\varepsilon_0 \\ y = \frac{1}{(1 - \varepsilon_0)K}. \quad (5.7)$$

Здесь σ_{ii}^0 , ($i=1,2,3$) – компоненты тензора напряжений в начальном состоянии.

Потенциал типа Мурнагана. Исходя из (Гузь, 1986б), в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. при использовании «истинных» скоростей в случае всестороннего деформирования в нелинейном приближении получаем:

$$K_0 = (K + 2a_1\varepsilon_0 + a_2\varepsilon_0^2)(1 + 2\varepsilon_0); \quad (5.8)$$

$$a_1 = a + b + \frac{c}{3} + \frac{K}{2}; \quad a_2 = a - b + c,$$

$$\mu_0(\varepsilon_0) = \mu + (c + 3b + 3K + 2\mu)\varepsilon_0 + \\ + 3(c + 7b + 3a)\varepsilon_0^2; \quad (5.9)$$

$$y = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon_0)(K + 2a_1\varepsilon_0 + a_2\varepsilon_0^2)}, \quad (5.10)$$

где a, b, c – модули упругости третьего порядка.

В линейном приближении (в смысле (Гузь, 1986б)) формулам (5.8)-(5.10) придадим вид:

$$K_0(\varepsilon_0) = K + 2\varepsilon_0(a_1 + K); \\ a_1 = a + b + \frac{c}{3} + \frac{K}{2}; \quad (5.11)$$

$$\mu_0 = \mu + (c + 3b + 3K + 2\mu)\varepsilon_0; \quad (5.12)$$

$$y = \frac{1}{K + 2\varepsilon_0(a_1 + K)}. \quad (5.13)$$

В рамках в.в.т.м.н.д.:

$$K_0(\varepsilon_0) = K + 2\left(a + b + \frac{c}{3} - \frac{K}{2}\right)\varepsilon_0 - \\ - (3a + 5b + \frac{c}{3})\varepsilon_0^2; \quad (5.14)$$

$$\mu_0(\varepsilon) = \mu + (c + 3b + 3K)\varepsilon_0 + \\ + (9a + 15b + c)\varepsilon_0^2; \quad (5.15)$$

$$y = \frac{1}{K + 2a_1\varepsilon_0 + a_2\varepsilon_0^2}; \quad a_1 = a + b + \frac{c}{3} - \frac{K}{2}; \quad (5.16)$$

$$a_2 = -3a - 5b - \frac{c}{3}.$$

В линейном приближении (в смысле (Гузь, 1986б)), формулы (5.14) – (5.16) приобретают вид:

$$K_0(\varepsilon_0) = K + 2a_1\varepsilon_0; \quad (5.17)$$

$$\mu_0(\varepsilon_0) = \mu + (c + 3b + 3K)\varepsilon_0; \quad (5.18)$$

$$y = \frac{1}{K_0 + 2a_1\varepsilon}; \quad a_1 = a + b + \frac{c}{3} - \frac{K}{2}. \quad (5.19)$$

Согласно (Гузь, 1986б), используя соотношения $V_l = \lambda_1^{-2} C_l^2$; $V_s = \lambda_1^{-2} C_s^2$, можно

получить аналогичные результаты в случае использования «натуральных» или «естественных» скоростей.

Полученные в пределах НЛТ результаты (5.8) – (5.19) позволяют определить критические параметры напряжений и деформаций, соответствующих явлению «внутренней» неустойчивости в средах и описываемых различными упругими потенциалами при всестороннем деформировании.

Критические параметры «внутренней» неустойчивости.

Квадратичный потенциал.

Согласно формулам (5.1) и (5.2) из условий $K_0(\varepsilon) = 0$ следует, что

$$(\varepsilon_0)_1 = -1; (\varepsilon_0)_2 = -\frac{1}{2}, \quad (6.1)$$

а из условий $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ следует, что

$$(\varepsilon_0)_3 = -\frac{\mu}{3K_0}.$$

Согласно формулам (5.4) получаем, что

$$(\varepsilon_0)_1 = -\frac{1}{3}; (\varepsilon_0)_2 = -\frac{\mu}{3K}. \quad (6.2)$$

Согласно формулам (5.6) получаем, что

$$(\varepsilon_0)_1 = 1; (\varepsilon_0)_2 = -\frac{\mu}{3K_0}. \quad (6.3)$$

Потенциал типа Мурнагана. Согласно формулам (5.8) и (5.9) получаем, что

$$(\varepsilon_0)_1 = -\frac{1}{2}; (\varepsilon_0)_{2,3} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - Ka_2}}{a_2} \quad (6.4)$$

$$(\varepsilon_0)_{4,5} = [6(c + 7b + 3a)]^{-\frac{1}{2}} \left\{ -(c + 3b + 3\lambda + 4\mu) \pm [(c + 3b + 3\lambda + 4\mu)^2 - 12(c + 7b + 3a)\mu]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Согласно формулам (5.11) и (5.12) получаем, что

$$(\varepsilon_0)_1 = -\frac{K}{2(a_1 + K)};$$

$$(\varepsilon_0)_2 = -\frac{\mu}{c + 3b + 3K + 2\mu}. \quad (6.5)$$

Согласно формулам (5.14) и (5.15) получаем, что

$$(\varepsilon_0)_{1,2} = \left[\left(2\left(3a + 5b + \frac{c}{3}\right) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2\left(a + b + \frac{c}{3} - \frac{K}{2}\right) \pm \left[4\left(a + b + \frac{c}{3} - \frac{K}{2}\right) + 4\left(3a + 5b + \frac{c}{3}\right)K \right]^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (6.6)$$

$$(\varepsilon_0)_{3,4} = \left[(2(9a + 15b + c)) \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ -(c + 3b + 3K) \pm [(c + 3b + 3K)^2 - 4\mu(9a + 15b + c)]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Согласно формулам (5.17) и (5.18) получаем, что

$$(\varepsilon)_1 = -\frac{K_0}{2a_1}; (\varepsilon_0)_2 = -\frac{\mu}{c + 3b + 3K}. \quad (6.7)$$

Анализ количественных результатов «внутренней» неустойчивости. Из структуры соотношений (6.1)-(6.3) следует, что в случае квадратичного потенциала в рамках всех вариантов теории начальных деформаций как в нелинейном, так и в линейном приближении критическая величина деформаций, соответствующая «внутренней» неустойчивости в случае всестороннего сжатия, определяется из одной и той же формулы:

$$(\varepsilon_0)_{кр} = -\frac{\mu}{3K}. \quad (7.1)$$

Исключение составляют результаты т.б.н.д. при линейном приближении, когда применительно к средам, для которых $\mu > K_0$, критическая величина деформаций $\varepsilon_{кр.} = (\varepsilon_0)_1 = -\frac{1}{3}$.

Этот результат связан с тем, что в случае малых деформаций существует предельный переход (Гузь, 1986б) к потенциалу линейного упругого изотропного тела и рассматривается

Материал	Оргстекло	Гранит	Кварц	Сталь 09Г2С
$(\varepsilon_0)_{кр}$	-0,1193	-0,2577	-0,33	-0,1791

Из этих результатов следует, что в рамках квадратичного потенциала, несмотря на то что величины деформации значительны, явление «внутренней» неустойчивости в рассматриваемых материалах может наблюдаться лишь при всестороннем сжатии. При всестороннем растяжении в данном случае оно не обнаруживается. Состояние равновесия материалов при всестороннем сжатии в пределах деформаций, у которых $|\varepsilon_0| < |(\varepsilon_0)_{кр}|$, является устойчивым. Данные о физико-механических свойствах оргстекла и стали 09Г2С заимствованы из (Гузь, 1986б), белого гранита Сьерра – из (Yin and Rasolofasaon, 1994), кварца – из (Александров и др., 2001).

Следовательно, в случае применения квадратичного потенциала формулы (3.7) и (4.2) при всестороннем сжатии применимы для оргстекла при $\varepsilon_0 < -0,1193$, для стали – при $\varepsilon_0 < -0,1791$, для белого гранита Сьерра – при $\varepsilon_0 < -0,2577$, для кварца – при $\varepsilon_0 < -0,3333$.

Рассмотрение численных примеров для стали и оргстекла связано с тем, что полученные теоретические результаты в основном имеют методологический характер, и поэтому их численные апробации проведены с использованием надежных экспериментальных данных этих материалов, хотя в определенных ситуациях полученные численные результаты для этих материалов могут представлять также существенный интерес.

Более подробно рассмотрим численные результаты, полученные для рассматриваемых материалов при описании их деформации с применением упругого потенциала типа Мурнагана, т.е. с помощью формул (6.4) – (6.7). В связи с необходимостью определения пределов применимости формул (5.10), (5.13), (5.16), (5.19), нужно выяснить из каких уравнений,

всестороннее деформирование. Численные величины критических деформаций для оргстекла, стали 09Г2С, гранита и кварца, вычисленные по формуле (7.1), следующие:

т.е. из $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ или $K_0(\varepsilon_0) = 0$, вычисляются критические величины деформаций.

а) *Оргстекло*. Расчеты показывают, что в пределах т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. при всестороннем деформировании величины критических деформаций определяются из уравнений $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ и согласно формуле (6.4) для случаев сжатия и растяжения соответственно равны: $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_4 = -0,1328$ и $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_5 = 0,0624$.

При этих величинах деформаций

$$K_0((\varepsilon_0)_{кр}) > 0.$$

При линейном приближении (относительно параметра нагрузки, в смысле (Гузь, 1986а, б), из уравнения $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно второй формуле (6.5) получаем, что $\varepsilon_{кр.} = (\varepsilon_0)_2 = 0,0952$, что соответствует случаю растяжения. В этом приближении явление «внутренней» неустойчивости при сжатии не обнаруживается.

В пределах в.в.т.м.н.д. из уравнения $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно формуле (6.6) получаем, что $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_3 = -0,1948$;

$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_4 = 0,1907$. При этих величинах деформаций $K_0((\varepsilon_0)_{кр}) > 0$.

При линейном приближении из уравнения $K_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно первой формуле (6.7) получаем, что $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_1 = 0,3419$. При этих величинах деформаций $\mu_0(\varepsilon_0)_{кр} > 0$. В этом приближении в случае сжатия явление «внутренней» неустойчивости не обнаруживается.

Таким образом, при всестороннем сжатии для определения приращения плотности в данном случае в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. соответственно необходимо исходить из фор-

мул (5.10) и (5.16) при ограничениях: $\varepsilon_0 < -0,1328$ и $\varepsilon_0 < -0,1948$.

Из анализа вышеприведенных результатов следует, что результаты линейного приближения качественно и количественно отличаются от результатов нелинейного решения. Поэтому при рассматриваемых задачах необходимо исходить из нелинейного решения. Поскольку такой результат получен и для других здесь рассматриваемых материалов, то ниже результаты линейного приближения не будут обсуждены. Кроме того, сравнение результатов, полученных в случаях т.б.н.д. и в.в.т.м.н.д., показывает, что они количественно отличаются, хотя качественные результаты аналогичны.

б) Сталь 09Г2С.

Как и для оргстекла, для стали в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. из уравнения $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно третьей формуле (6.4) получено, что $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_4 = -0,1424$;

$$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_5 = 0,1907,$$

а в пределах в.в.т.м.н.д. из того же уравнения согласно второй формуле (6.6) определено, что

$$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_3 = -0,1826;$$

$$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_4 = 0,0707.$$

Следовательно, формулы (5.10) и (5.16) в случае всестороннего сжатия применимы при $\varepsilon_0 < -0,1424$; $\varepsilon_0 < -0,1826$ соответственно.

в) Белый гранит Сьерра.

В этом случае в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. из уравнения $K_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно второй формуле (6.4) получаем $\varepsilon_{кр.} = (\varepsilon_0)_3 = 0,0009$, что соответствует случаю растяжения. В случае сжатия всегда $K_0(\varepsilon_0) > 0$ и $\mu_0(\varepsilon_0) > 0$, т.е. явление «внутренней» неустойчивости не обнаруживается. В пределах в.в.т.м.н.д. из уравнения $K_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно первой формуле (6.6)

$$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_1 = 0,0009;$$

$$(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_2 = -0,6279.$$

Следовательно, формула (5.10) в случае всестороннего сжатия применима при любых упругих деформациях, а формула (5.16) – при $\varepsilon_0 < -0,6279$.

г) Кварц.

В этом случае в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. из уравнения $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно третьей формуле (6.4) получаем, что $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_4 = -0,1582$, а из уравнения $K_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно второй формуле (6.4) – $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_3 = 0,2531$.

В пределах в.в.т.м.н.д. из уравнения $\mu_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно второй формуле (6.6) получаем, что $\varepsilon_{кр.} = (\varepsilon_0)_3 = -0,2082$, а из уравнения $K_0(\varepsilon_0) = 0$ согласно первой формуле (6.6) – $(\varepsilon_0)_{кр} = (\varepsilon_0)_1 = 0,2185$. Следовательно, формулы (5.10) и (5.16) в случае всестороннего сжатия применимы при $\varepsilon_0 < -0,1582$ и $\varepsilon_0 < -0,2082$.

Вышеприведенные численные результаты для различных материалов свидетельствуют о том, что в пределах НЛТ «внутренняя» неустойчивость в случае всестороннего сжатия обнаруживается при 10-и и более процентах деформаций. В обычных условиях материалы и конструкции, изготовленные из них, не могут выдержать таких уровней нагрузок и деформаций. В условиях же глубоких недр Земли такие уровни нагрузок и деформаций вполне достижимы. Поскольку до указанных критических значений условия (4.3) выполняются, то для расчета приращения плотности с учетом нелинейности деформирования и напряженности сред в этих пределах можно использовать формулу (3.9). Естественно, что для анизотропных сред вследствие малости сдвиговых жесткостей явление «внутренней» неустойчивости будет проявляться при значительно меньших уровнях нагрузок и деформаций. Также очевидно, что в реальных условиях вследствие трещиноватости, наличия примесей разножесткостных сред, слоистости и т.д. при достаточно низких уровнях нагрузок и деформаций в теле могут реализоваться локальные, приповерхностные и структурные

неустойчивости. Однако за геологическое время (сотни миллионов и миллиарды лет) вполне реально, что в результате аналогичных и других процессов деформирования могут формироваться условия, при которых появляются возможности перехода процесса уплотнения сред в процесс разуплотнения наряду с другими механизмами и по механизму «внутренней» неустойчивости.

Численные результаты по приращению плотности. Расчеты проведены для различных материалов с применением потенциала типа Мурнагана. Некоторые результаты вычислений приведены в табл. 1, 2 и отражены на рисунках 2, 3. Результаты табл. 1 получены для оргстекла, а табл. 2 – для белого гранита Сьер-

ра. Результаты рис.2 относятся к стали 09Г2С, а рис.3 – кварцу. На рисунках линией 1 показаны результаты, полученные в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. в линейном приближении; линией 2 – в.в.т.м.н.д. в линейном приближении; линией 3 – т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д. в нелинейном приближении; линией 4 – в.в.т.м.н.д. в нелинейном приближении. Из приведенных результатов следует, что напряженности сред и нелинейности деформирования приводят к существенным поправкам при определении приращения плотности. Величины этих поправок значительно варьируют для различных материалов. С ростом величины деформации различия между результатами, полученными в рамках т.б.н.д. и в.в.т.м.н.д., растут.

Таблица 1

Зависимость параметра плотности (γ) от изменения деформации

- ε	γ			
	Линейное приближение		Нелинейное приближение	
	по формуле (5.13)	по формуле (5.19)	по формуле (5.10)	по формуле (5.16)
0	0,1884	0,1884	0,1884	0,1884
0,01	0,1829	0,1831	0,183149	0,18303
0,02	0,1777	0,1780	0,1786	0,177813
0,03	0,1728	0,1732	0,1746	0,172783
0,04	0,1682	0,1687	0,1711	0,1679
0,05	0,1638	0,1644	0,1681	0,163258
0,06	0,1596	0,1603	0,1656	0,158749
0,07	0,1556	0,1564	0,1635	0,154402
0,08	0,1519	0,1527	0,1617	0,1502
0,09	0,1483	0,1492	0,1603	0,146166
0,1	0,1448	0,1458	0,1592	0,142265

Таблица 2

Зависимость параметра плотности (γ) от изменения деформации

- ε	γ			
	Линейное приближение		Нелинейное приближение	
	по формуле (5.13)	по формуле (5.19)	по формуле (5.10)	по формуле (5.16)
0	0,0364	0,0364	0,0364	0,0364
0,01	0,0031	0,0031	0,003281	0,00315
0,02	0,0016	0,0016	0,001817	0,001672
0,03	0,0011	0,0011	0,001306	0,001151
0,04	0,0008	0,0008	0,001051	0,000884
0,05	0,0007	0,0007	0,000901	0,000723
0,06	0,0006	0,0006	0,000805	0,000615
0,07	0,0005	0,0005	0,000742	0,000538
0,08	0,0004	0,0004	0,000699	0,00048
0,09	0,0004	0,0004	0,000671	0,000435
0,1	0,0003	0,0003	0,000654	0,000399

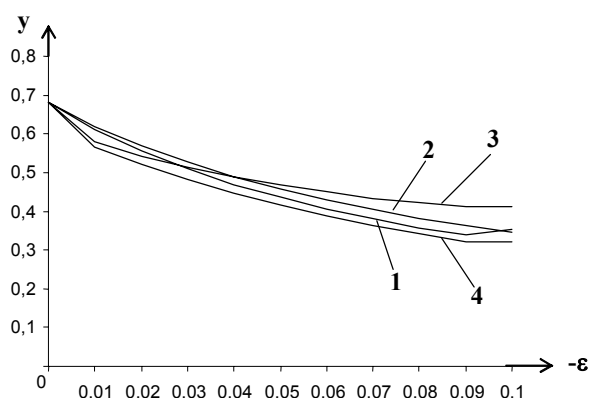


Рис. 2. Зависимость параметра плотности стали 09Г2С от роста деформации

В табл.3 приведены численные значения величин давлений в ГПа при различных степенях деформированности ряда материалов (сред) в случае всестороннего сжатия. В скобках указан процент вклада нелинейной деформации на величину давления. В последней строке приведены критические зна-

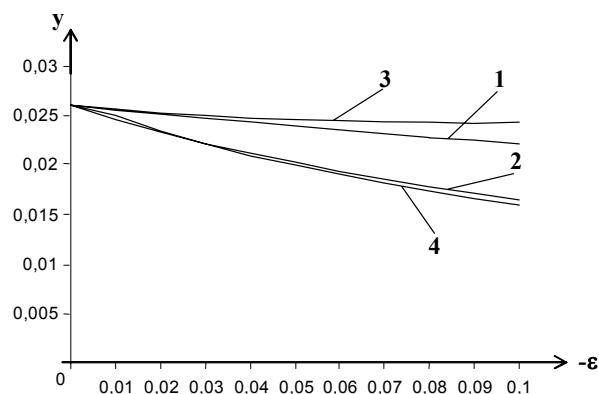


Рис. 3. Зависимость параметра плотности кварца от роста деформации

чения давлений, соответствующие «внутренней» неустойчивости. Из приведенных результатов следует, что с ростом величин давлений (глубин) вклад нелинейной деформации в результаты становится значительным как в рамках т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д., так и в рамках в.в.т.м.н.д.

Таблица 3

Учет доли нелинейной деформации при определении величины давления при всестороннем сжатии в рамках различных теорий

-ε	Оргстекло		Сталь 09Г2С		Кварц	
	т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д.	в.в.т.м.н.д.	т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д.	в.в.т.м.н.д.	т.б.н.д. и п.в.т.м.н.д.	в.в.т.м.н.д.
0,01	0,1769 (9%)	0,1644 (3,1%)	0,052 (15,6%)	0,050 (14,8%)	0,96 (6,6%)	0,95 (6,6%)
0,05	1,26 (33,1%)	0,9243 (13,8%)	0,447 (48,1%)	0,381 (42,1%)	6,327 (26,6%)	6,03 (26,6%)
$(\varepsilon_0)_{кр}$	5,80 (56,6%)	5,04 (38,4%)	2,686 (72,4%)	3,045 (73,6%)	36,06 (52,6%)	45,75 (59,4%)

ЛИТЕРАТУРА

- АБАСОВ, М.Т., КУЛИЕВ, Г.Г., БУРЯКОВСКИЙ, Л.А., ДЖЕВАНШИР, Р.Д., АЛИЕВ, Э.А. 1993. Теоретические основы и математическая модель механизма формирования складчатости путем потери устойчивости. *Геотектоника*, 3, 90-101.
- АБАСОВ, М.Т., КУЛИЕВ, Г.Г., ДЖЕВАНШИР, Р.Д. 1999. Неклассическая теоретическая модель структурного развития Литосферы. *Изв. АН Азербайджана. Науки о Земле*, 2, 149-162.
- АБАСОВ, М.Т., КУЛИЕВ, Г.Г., ДЖЕВАНШИР, Р.Д. 2000. Модель развития Литосферы. *Вестник Российской Академии Наук*, 70, 2, 129-135.

- АЛЕКСАНДРОВ, К.С., ПРОДАЙВОДА, Г.Т., МАСЛОВ, Б.П. 2001. Метод определения нелинейных упругих свойств горных пород. *Докл. РАН*, 380, 1, 109 – 112.
- АЛЬТШУЛЕР, Л.В., КРУПНИКОВ, К.К., ФОРТОВ, В.Е., ФУНТИКОВ, А.И. 2004. Начало физики мегабарных давлений. *Вестник Российской Академии Наук*, 74, 11, 1011-1022.
- БАКУЛИН, В.Н., ПРОТОСЕНИЯ, А.Г. 1982. О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах. *Докл. АН СССР*, 263, 2, 314-316.
- БУЛЛЕН, К.Е. 1978. Плотность Земли. Мир. Москва. 442.

- ВОЛАРОВИЧ, М.П., БАЮК, Е.И., ЛЕВЫКИН, А.И., ТОМАШЕВСКАЯ, И.С. 1974. Физико-механические свойства горных пород и минералов при высоких давлениях и температурах. Наука. Москва. 223.
- ВЫЖВА, С.А., МАСЛОВ, Б.П., ПРОДАЙВОДА, Г.Т. 2005. Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических сред. *Геофизический журнал*, 27, 6, 1012-1022.
- ГУЗЬ, А.Н. 1977. Основы теории устойчивости горных выработок. Наук. Думка. Киев. 204.
- ГУЗЬ, А.Н. 1979. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Наук. Думка. Киев. 144.
- ГУЗЬ, А.Н. 1986а. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Вища шк. Киев. 512.
- ГУЗЬ, А.Н. 1986б. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Общие вопросы. I. Закономерности распространения. II. Наук. Думка. Киев. 376, 536.
- ГУЗЬ, А.Н. 1990. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. Наук. Думка. Киев. 632.
- ГУЗЬ, А.Н., МАХОРТ, Ф.Г. 1988. Акустоэлектромагнитоупругость. Наук. думка. Киев. 248.
- ЖАРКОВ, В.Н. 1983. Внутреннее строение Земли и планет. Наука. Москва. 416.
- КАЛИНИН, В.А. 2000. Свойства геоматериалов и физика Земли. Избранные труды. ОИФЗ РАН. Москва. 334.
- КЛАРКА, С. мл. 1969. Справочник физических констант горных пород. Мир. Москва. 543.
- КУЛИЕВ, Г.Г. 2000. Определение коэффициента Пуассона в напряженных средах. *Докл. РАН*, 370, 4, 534-537.
- КУЛИЕВ, Г.Г. 2001. Концепция неустойчивости геодинамической эволюции Земли. *Электронный научно-информационный журнал "Вестник" ОИГГН РА*, 1, 15.
- КУЛИЕВ, Г.Г. 2005. Неклассическая линеаризованная теория деформаций в геофизике. *Известия НАН Азербайджана. Науки о Земле*, 2, 41-51.
- КУЛИЕВ, Г.Г. 2005. Основы неклассической линеаризованной теории деформаций в геодинамике. *Известия НАН Азербайджана. Науки о Земле*, 1, 21-34.
- КУЛИЕВ, Г.Г., ДЖАББАРОВ, М.Д. 1998. О распространении упругих волн в напряженных нелинейных анизотропных средах. *Известия АН Азербайджана. Науки о Земле*, 2, 103-112.
- САФАРОВ, И.Б. 2003. Анизотропия упругих свойств горных пород при высоких термодинамических условиях и петрофизические модели Литосферы. Автореф. дисс. на соис. уч. степ. д.г.-м.н. Баку. 47.
- BIOT, M.A. 1965. *Mechanics of incremental deformations*. Willey. New-York. 504.
- NAVROTSKY, A. 1994. *Physics and chemistry of Earth materials*. University press. Cambridge. 413.
- THURSTON, R., BRUGGER, K. 1964. Third-order elastic constants and velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Phys. Rev. A.*, 133, 6, 1604-1610.
- YIN, H., RASOLOFOSAON, P.N.J. 1994. Nonlinear and linear elastic behavior of anisotropic rocks: Ultrasonic experiments versus theoretical predictions. Abstracts, 64 SEG meeting, Los Angeles, Expanded Abstracts, - Paper SL., 3, 4, 1129-1132.